حل السلسلة الثانية: دالة الإنتاج في الفترة الطويلة

*حل التمرين الأول:

1/لدينا دالة الإنتاج: $Q = f(L,K) = \alpha K + BL + T$

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow f(tL,tK) = t^n f(L,K) = t^n.Q$$

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow f(tL,tK,tT) = \alpha(tK) + B(tL) + (tT)$$
$$\Rightarrow f(tL,tK,tT) = \alpha tK + BtL + tT$$
$$\Rightarrow t(\alpha K + BL + T) = t.Q$$

إذن الدالة متجانسة من الدرجة الأولى وغلة الحجم ثابتة.

2/لدينا دالة الإنتاج: $Q = f(L,K) = AL^{1-\alpha}K^{\alpha}$

حيث $A \succ 0$

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow f(tL,tK) = A(tL)^{1-\alpha}(tK)^{\alpha}$$
$$\Rightarrow At^{1-\alpha}L^{1-\alpha}t^{\alpha}K^{\alpha}$$
$$\Rightarrow t^1 Q$$

الدالة متجانسة من الدرجة n=1 وغلة الحجم ثابتة (الدالة من نوع Cobb-Douglas)

3/لدينا دالة الإنتاج: $Q = f(L,K) = AL^2K$

حيث $A \succ 0$

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow f(tL,tK) = A(tL)^2(tK)$$
$$\Rightarrow At^2L^2tK$$
$$\Rightarrow t^3 Q$$

الدالة متجانسة من الدرجة n=3 وغلة الحجم متزايدة

4/ لدينا دالة الإنتاج: $Q = f(L,K) = L + K^{\frac{1}{2}}$

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow f(tL,tK) = tL + (tK)^{\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow tL + t^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}} \Rightarrow t^{\frac{1}{2}}(t^{\frac{1}{2}}L + K^{\frac{1}{2}})$$
$$\Rightarrow f(tL,tK) \neq t^n Q$$

ومنه الدالة غير متجانسة.

*حل التمرين الثاني:

1/تحديد وضع التوازن وقيم التكلفة:

لدينا:

$$2400 = 20L + 20K$$
$$\Rightarrow 20K = 2400 - 20L$$
$$\Rightarrow K = \frac{2400 - 20L}{20}$$

$$\Rightarrow K = 120 - L$$

لتمثيل خط التكلفة والذي معادلته من الشكل: $K = 120 - L$ نحتاج إلى نقطتين:

L	**120**	**0**
K	**0**	**120**

- تحديد وضع التوازن:

$$\begin{cases} Max: Q = f(L,K) = L^{0,5}K^{0,5} \\ s/c: 2400 = 20L + 20K \end{cases}$$

مضروب لاغرانج: $L = L^{0,5}K^{0,5} + \lambda(2400 - 20L - 20K)$

- الشرط الازم: إنعدام المشتقات الجزئية الأولى لـــ: λ, K, L:

$$\frac{\delta l}{\delta L} = 0 \Rightarrow 0,5L^{-0,5}.K^{0,5} - 20\lambda = 0 \Rightarrow 0,5L^{-0,5}.K^{0,5} = 20\lambda.....\boxed{1}$$
$$\frac{\delta K}{\delta L} = 0 \Rightarrow 0,5L^{0,5}.K^{-0,5} - 20\lambda = 0 \Rightarrow 0,5L^{0,5}.K^{-0,5} = 20\lambda.....\boxed{2}$$
$$\frac{\delta l}{\delta L} = 0 \Rightarrow 2400 - 20L - 20K = 0.....\boxed{3}$$

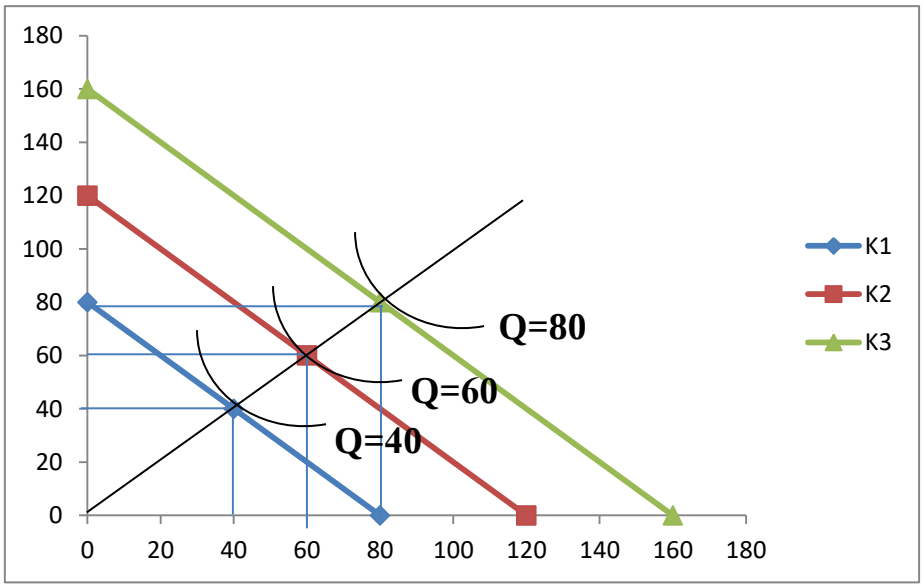
نقسم $\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$ نجد:

$$\frac{\cancel{0,5}L^{-0,5}.K^{0,5}}{\cancel{0,5}L^{0,5}.K^{-0,5}} = \frac{\cancel{20\lambda}}{\cancel{20\lambda}} \Rightarrow \frac{K}{L} = 1 \Rightarrow \boxed{K = L}^{*}$$

نعوض بالعلاقة (*) في المعادلة رقم 3 نجد:

$$2400 - 20L - 20L = 0 \Rightarrow 2400 = 40L$$
$$\Rightarrow L = 60 \Rightarrow K = 60$$

*تحديد معادلة مسار التوسع: لدينا العلاقة (*) $\boxed{K = L}$ هي معادلة مسار التوسع (عبارة عن معادلة خط المستقيم).



*استنتاج مواضع التوازن الأخرى:

أ/الوضع الأول لما Q=40

$$Q=40 \Rightarrow (L,K)=(40,40)^*$$
$$\Rightarrow CT=20(40)+20(40)=1600$$
$$K_1=\frac{1600}{20}-\frac{20}{20}L \Rightarrow \boxed{K_1=80-L}$$

ب/الوضع الثالث لما Q=80

$$Q=80 \Rightarrow (L,K)=(80,80)^*$$
$$\Rightarrow CT=20(80)+20(80)=3200$$
$$K_3=\frac{3200}{20}-\frac{20}{20}L \Rightarrow \boxed{K_3=160-L}$$

*حل التمرين الثالث

1/تحديد المسار الأمثل لتطور المؤسسة

$$\begin{cases} Max: Q=f(L,K)=6LK \\ s/c: CT=3L+5K \end{cases}$$

مضروب لاغرانج: $L=6LK+\lambda(CT-3L-5K)$

- الشرط الازم: إنعدام المشتقات الجزئية الأولى لـــ: λ, K, L:

$$\frac{\delta l}{\delta L}=0 \Rightarrow 6K-3\lambda=0 \Rightarrow 6K=3\lambda.....\boxed{1}$$
$$\frac{\delta K}{\delta L}=0 \Rightarrow 6L-5\lambda=0 \Rightarrow 6L=5\lambda.....\boxed{2}$$
$$\frac{\delta l}{\delta L}=0 \Rightarrow CT-3L-5K=0.....\boxed{3}$$

نقسم $\frac{1}{2}$ نجد:

$$\frac{6K}{6L}=\frac{3\cancel{\chi}}{5\cancel{\chi}}\Rightarrow\frac{K}{L}=\frac{3}{5}\Rightarrow 5K=3L$$

$$\Rightarrow \boxed{K=\frac{3}{5}L}^{*}$$ وهي معادلة مسار توسع المؤسسة

2/تحديد حجم الإنتاج الأمثل لما **CT=600**

نبحث أولا عن كميات عنصري الإنتاج المثلى لنتمكن من حساب حجم الإنتاج الأمثل:

لدينا: $\boxed{K=\frac{3}{5}L}^{*}$

إذن نعوض بالعلاقة (*) في المعادلة رقم 3 نجد:

$$600-3L-5L=0\Rightarrow 600-3L-\cancel{5}(\frac{3}{\cancel{5}}L)=0\Rightarrow 600=6L$$

$$\Rightarrow L=\frac{600}{6}\Rightarrow L=100$$

نعوض في العلاقة (*) نجد:

$$K=\frac{3}{5}(100)\Rightarrow K=60$$

$$(L,K)^{*}(100,60)$$

ومنه حجم الإنتاج الأمثل هو: Q=6(100)(60)=3600

*حل التمرين الرابع

إن مسألة الأمثلية هنا تتمثل في البحث عن التكلفة الدنيا التي تسمح بإنتاج إنتاج قدره Q=100.

ومنه البرنامج يكتب على الشكل التالي:

$$\begin{cases} Min: CT=9L+4K \\ s/c: 100=2\sqrt{L}\sqrt{K} \end{cases}$$

مضروب لاغرانج: $L=9L+4K+\lambda(100=2\sqrt{L}\sqrt{K})$

- الشرط الازم: إنعدام المشتقات الجزئية الأولى لـــ: λ,K,L:

$$\frac{\delta l}{\delta L}=0\Rightarrow 9L-\cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{L}}\cdot\sqrt{K}\lambda=0\Rightarrow 9=\frac{\sqrt{K}\lambda}{\sqrt{L}}.....\boxed{1}$$

$$\frac{\delta K}{\delta L}=0\Rightarrow 4-\cancel{2}\sqrt{L}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{K}}\lambda=0\Rightarrow 4=\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{K}}\lambda.....\boxed{2}$$

$$\frac{\delta l}{\delta \lambda}=0\Rightarrow 100-2\sqrt{L}.\sqrt{K}=0.....\boxed{3}$$

نقسم $\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$ نجد:

$$\frac{9}{4}=\frac{\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{L}}\chi}{\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{K}}\chi}\Rightarrow\frac{9}{4}=\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{L}}.\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{L}}$$

$$\Rightarrow\frac{9}{4}=\frac{K}{L}\Rightarrow 9L=4K\Rightarrow\boxed{K=\frac{9}{4}L}^{*}$$

نعوض بالعلاقة (*) في المعادلة رقم 3 نجد:

$$100-2\sqrt{L}.\sqrt{\frac{9}{4}L}=0\Rightarrow 100-2\sqrt{L}.\frac{3}{2}\sqrt{L}=0$$

$$\Rightarrow 100=3L\Rightarrow L=\frac{100}{3}=33,33$$

نعوض في (*) نجد:

$$K=\frac{9}{4}(\frac{100}{3})\Rightarrow K=75$$

$$(L,K)^{*}(\frac{100}{3},75)$$